Capítulo especial. Capítulo 4

Energía del campo electrostático

Observación: ***parte de los temas tratados en este Capítulo comenzaron a ser desarrollados en los capítulos anteriores. Vamos a ampliar el concepto de Energía del Campo Electrostático para aplicarlo no solamente en el vacío sino también en medios materiales.***

4.1 Trabajo y variación de energía potencial. Analogías y diferencias entre el campo gravitatorio y el electrostático

¿Cuál es el interés en calcular campos eléctricos? Los campos eléctricos nos determinan las fuerzas que “sufren” las cargas; con fuerzas se pueden mover cargas y el movimiento de cargas nos puede traer beneficios si logramos hacerlo en forma “ordenada”: podremos generar corrientes y hacer funcionar una cafetera, una computadora o un avión…. Así, al mover cargas de manera adecuada podremos acumular energía y luego utilizarla con fines determinados. Vamos a empezar viendo si hay energía acumulada al armar un sistema de cargas. Intuitivamente… si tenemos una carga (por ejemplo, positiva) en un lugar del espacio y otra carga positiva muy alejada, debemos hacer un trabajo para acercarlas (venciendo la fuerza de repulsión). Pero con esto no sabemos qué y cuánto se acumuló.

Como en el caso de Mecánica, muchos problemas se pueden simplificar notablemente si se usan consideraciones energéticas. Es por ello que vamos a ve qué se puede hacer en situaciones electrostáticas. Vamos a ir por pasos. Supongamos que en algún lugar del espacio tenemos una carga aislada (es decir, no sufre interacción con otras cargas) y la llevamos hasta un punto del espacio. Para ello no deberemos hacer ningún trabajo ya que no actúan fuerzas eléctricas sobre ella (y desde ya despreciábamos las gravitatorias). Esta carga queda “pegada” en ese lugar del espacio, está y estará siempre estática… Pero ahora, para traer otra carga positiva $q_2$desde muy lejos (desde un lugar donde no hay otras cargas) deberemos hacer un trabajo. Supongamos que la traemos por un camino *C* de forma tal que no se acelere i.e. lo hacemos en una forma tan lenta que la velocidad de la carga será casi nula. Para ello debemos aplicarle en todo instante una fuerza igual

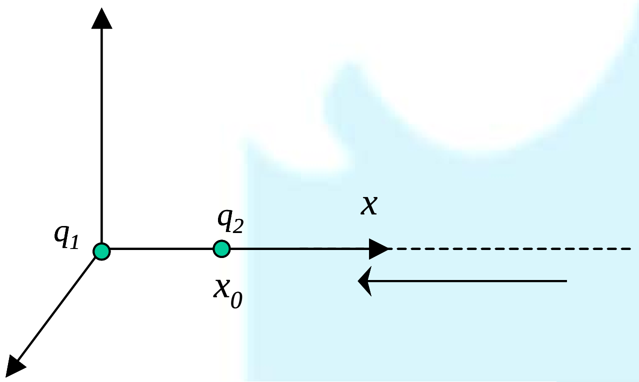

Fig.1.*Dos cargas en el espacio separadas una distancia* x_0

y contraria a la que la carga q_1 le ejerce. En consecuencia, $\vec{F}_{aplicada} = -\vec{F}_{q_2}$ y

$$W_{\substack{realizado \\ por\ mi\ mano}} = -\int_{\infty}^{x_0} \vec{F}_{q_1\, sobre\ q_2} \cdot d\vec{x} = \frac{-q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{x_0} \frac{\breve{e}_x}{x^2} \cdot \breve{e}_x dx = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x_0} \quad (1)$$

Este es el trabajo realizado **sobre el sistema** para tener separadas las dos cargas una distancia x_0. Pero… ¿depende del camino? Es muy fácil verlo en este caso. Tomamos una capita esférica y un camino arbitrario para traer a q_2. En la capita el campo generado por q_1 será $\vec{E}_{q_1}$ y la fuerza sobre q_2 será $\vec{F}_{q_1 \to q_2}$. El diferencial de trabajo para trasladar la carga q_2 estará dado por $\vec{F}_{q_1 \to q_2} \cdot d\vec{l}$.

Como la fuerza es radial, al hacer el producto escalar "se proyecta" el $\overrightarrow{dl}$ sobre la dirección radial. Y, como además, la fuerza solamente depende de la distancia, el trabajo será independiente del camino. ¿Sucede lo mismo si en lugar de una carga $q_1$se tiene una distribución de cargas? En virtud del Principio de Superposición, lo que surge para una carga puede ser extendido a muchas cargas. En consecuencia, el trabajo para llevar en forma cuasiestática una carga puntual de un lado al otro del espacio en presencia de otras cargas es independiente del camino, i.e. la fuerza electrostática es conservativa. Hay otra forma de verlo matemáticamente a través del rotor de la fuerza electrostática.

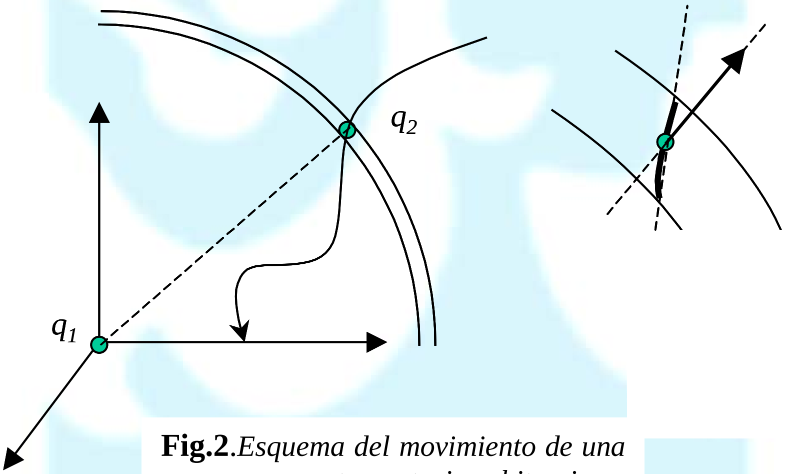

Fig.2.*Esquema del movimiento de una carga por una trayectoria arbitraria*

Como $F_r = \dfrac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2}$ y $F_\theta = F_\varphi = 0 \; (2)$

El rotor en coordenadas esféricas resulta para $r \neq 0$

$$rot(\vec{F}) = \frac{1}{r \ \sin(\varphi)}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin(\varphi \quad F_\theta) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial\theta}\right] \ \breve{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial F_r}{\partial\theta} - \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial\theta}\right] \ \breve{\varphi} + \\ + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \quad F_r)}{\partial\varphi}\right] \ \breve{\theta} \ = 0 \qquad (3)$$

con lo que comprobamos que el rotor es nulo. En consecuencia, la fuerza electrostática es **conservativa**. (Por extensión, y dada la proporcionalidad de la fuerza con el campo eléctrico, se dice que el campo **electrostático** es conservativo).

Análogamente, habrá una energía potencial electrostática producto del trabajo realizado para desplazarla en contra de las fuerzas eléctricas. Como

$$\Delta E = \Delta E_{cin} + \Delta U = W_{Fzas\ no\ conservativas} = W_{todasl\ las\ fzas} - W_{Fuerzas\ Conservativas} \ ,(4)$$

la variación de energía se refiere a la variación del sistema y el trabajo al trabajo realizado por las fuerzas **sobre** el sistema (que en nuestro caso es el sistema q_1 q_2)

$$\Delta U = -W_{\substack{Fzas\ conservativass \\ sobre\ q_1}} = W_{\substack{realizado\ por \\ nosotros}} = -\int_A^B \vec{F}_{q_1 \to q_2} \cdot d\vec{l} = -q_2 \int_A^B \vec{E}_{q_1} \cdot d\vec{l} \ (5)$$

Se dice que el **trabajo realizado por el campo es igual a menos la variación de energía potencial del sistema** $W_{\substack{realizado\ por \\ el\ campo}} = -\Delta U$

Pregunta: ¿Cuánto vale el trabajo de todas las fuerzas? Si la variación de energía cinética es nula, ¿cuál es la fuerza no conservativa que hace trabajo y que provoca variación de la energía total del sistema?

De esta manera obtenemos que al armar una distribución de cargas tendremos energía disponible para ser utilizada en mejor ocasión. Esto es formalmente idéntico a lo obtenido para el campo gravitatorio.

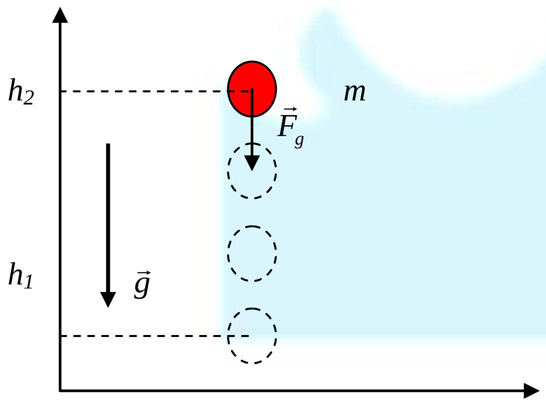

Fig.3. *Desplazando una masa desde h_2 hasta h_1*

Sabemos que la energía potencial gravitatoria proviene de "levantar" un cuerpo. I.e. del trabajo contra las fuerzas gravitatorias. El trabajo que mi mano debe realizar para llevar a la masa *m* desde una altura h_1 hasta h_2 es

$$W_{\substack{realizado \\ por\ mi\ mano}} = -\int_{h_1}^{h_2} \vec{F}_{tierra\ sobre\ m} \cdot d\vec{y} = -\int_{\infty}^{x_0} \vec{F}_g \cdot \breve{e}_y dy = -mg\int_{h_1}^{h_2} -\breve{e}_y \cdot c$$

(6)

Y el trabajo realizado por el campo gravitatorio es (lo hacemos aunque es reiterativo para que vean que no cambiamos nada excepto la aplicación del principio de acción y reacción):

$$W_{\substack{realizado\\por\,el\,campo}} = +\int_{h_1}^{h_2} \vec{F}_{tierra\,sobre\,m} \cdot d\vec{y} = \int_{\infty}^{x_0} \vec{F}_g \cdot \breve{e}_y dy = mg\int_{h_1}^{h_2} (-\vec{e}_y)\cdot dy\,\vec{e}_y = -mg(h_2 - h_1) = -\Delta U \qquad (7)$$

Y este trabajo solamente depende de los puntos inicial y final, y no de la trayectoria. Debemos notar que la fuerza gravitatoria siempre es de atracción, mientras que la electrostática es de atracción en el caso en que las cargas sean de naturaleza diferente (es decir, de signo contrario)

De Física I sabemos que

$$\Delta E = \Delta E + \Delta U = W_{Fzas\,no\,conservativas} = W_{Fzas\,Totales} - W_{Fzas\,conservativas} \quad (8)$$

donde la variación de energía se refiere a la variación del sistema y el trabajo al trabajo realizado por las fuerzas **sobre** el sistema.

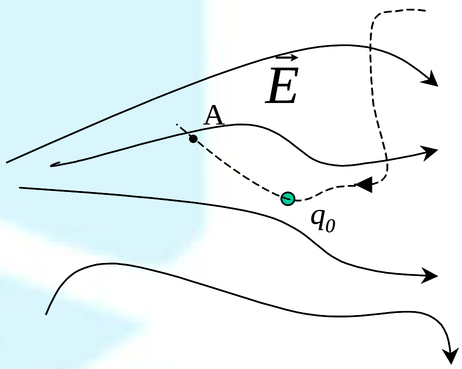

Fig.4 *desplazando una carga en elcampo E desde infinito hasta A*

Resumiendo…Si existe un campo eléctrico en el espacio $\vec{E}$ (producido ya no por la carga puntual q_1 sino por un conjunto o distribución de cargas) y traemos cuasiestáticamente una carga de prueba (positiva por convención) q_0 desde el infinito hasta un punto A, el trabajo realizado por nosotros será

1) $W_{\substack{realizado\,por\\nosotros}} = -\int_{\infty}^{A} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$ (9)

pues actúa una fuerza $q_0\vec{E}$ sobre q_0 y debemos aplicar una fuerza igual y contraria en cada punto para llevarla hasta A.

2) $W_{\substack{realizado\,por\\nosotros}} = \Delta U$ (10)

3) $W_{\substack{realizado\,por\\el\,el\,campo}} = +\int_{\infty}^{A} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = -W_{\substack{realizado\,por\\nosotros}} = -\Delta U$ (11)

Entonces $\Delta U = -\int_{\infty}^{A} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$ (12)

Si consideramos llevar la carga de prueba desde A hasta B tendremos que

$$\Delta U = U(B) - U(A) = \int_A^B dU = -\int_A^B q_0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -q_0 \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad (13)$$

Como se ve claramente, la variación de energía potencial del sistema de cargas al llevar la carga de prueba q_0 desde A hasta B es directamente proporcional a q_0. Habíamos definido el trabajo realizado (o a realizar) por nosotros por unidad de carga, i.e. definimos la **diferencia de potencial entre los puntos A y B** como

$$\frac{W_{\substack{realizado\\ por\ nosotros}}}{q_0} = V(B) - V(A) = \int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad (14)$$

Lo que nos tiene que quedar muy claro es que el potencial eléctrico “no existe” de la misma manera que no existe la energía potencial eléctrica ni la gravitatoria. Lo que tiene sentido es “**la diferencia de potencial”** Es decir, existe la función potencial que es una función matemática a la que le asignaremos sentido físico si tenemos en cuenta que siempre nos referiremos a una diferencia de potencial.

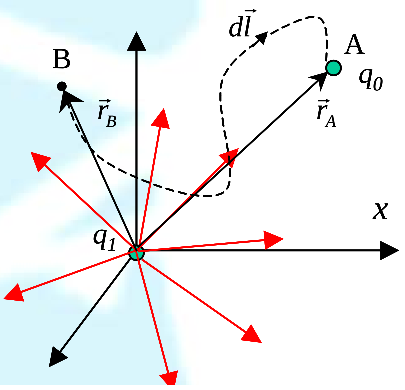

Fig.5.*movimiento de una carga q_0 desde A hasta B*

Veamos otro ejemplo: mover una carga de prueba en un campo generado por una carga q_1>0.

$$W_{\substack{realizado\ por\\ el\ el\ campo}} = +\int_\infty^A q_0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -W_{\substack{realizado\ por\\ nosotros}} = -\Delta U \quad (15)$$

En nuestro caso (ver figura) elegimos $\vec{r}\,' = 0$ En consecuencia, la diferencia de energía potencial entre B (punto final) y A (punto inicial) estará dado por

$$\begin{aligned}\Delta U &= -q_0 \int_A^B \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}^{\,3}\right|}\cdot d\vec{l} = -q_0 \int_A^B \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{\left|\vec{r}^{\,3}\right|}\cdot dr = -q_0 \int_A^B \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{\left|\vec{r}\right|^2} = \\ &= -q_0 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{\left|\vec{r}\right|^2} = \frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big]_A^B = \frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)\end{aligned} \quad (16)$$

Esto significa que si el punto A está más alejado que el punto B de la carga que produce el campo, la diferencia de energía potencial será positiva. Lo cual es correcto porque haríamos un trabajo para traer una carga positiva. Si, **en particular**, el punto inicial de la carga de prueba es el infinito, tendremos

$$\Delta U = -\int_{\infty}^{B} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|^3} r\, dr = -\int_{\infty}^{B} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{|\vec{r}|^2} =$$
$$= +\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}\bigg|_{\infty}^{r_B} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_B} = U(B) - U(\infty) \tag{17}$$

Podemos darle un valor arbitrario al valor de la energía potencial en el infinito: cero, 21J o –3J. No importa!!**Lo importante es la diferencia!!!**

4.2 Energía de una distribución discreta de cargas en vacío

Una distribución cualquiera de cargas eléctricas tiene una cierta cantidad de energía asociada. Esto es particularmente fácil de ver en el caso de contar con *N* cargas Q_i ubicadas en las posiciones $\vec{r}_i$. Consideramos que este sistema es armado trayendo sucesivamente cada una de las cargas desde una distancia muy grande. Así, para traer la primera no efectuamos trabajo alguno dado que sobre la misma no actúan fuerzas eléctricas. Luego, para poner la segunda carga en su posición final debemos hacer un trabajo W_{12}.

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|} \tag{18}$$

Observemos que el trabajo para traer una cualquiera de las cargas cuando está la otra es independiente del orden y que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{r}_{12}|}$ es “el potencial” creado en la posición 2 por la carga 1, i.e. V_1. Entonces .

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|} = Q_1 V_2 = Q_2 V_1 = \frac{1}{2}(Q_1 V_2 + Q_2 V_1) \tag{19}$$

Si ahora movemos imaginariamente la tercera carga podemos calcular el trabajo realizado computando los términos entre la carga 1 y la 3 y luego entre la 2 y la 3.

$$W_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{|\vec{r}_{13}|} \qquad W_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{|\vec{r}_{23}|} \tag{20}$$

Podemos continuar así con las demás cargas hasta haber conformado toda la distribución de cargas. La cantidad total de trabajo realizado (y por lo tanto la energía almacenada) es simplemente la suma de los términos anteriormente mencionados.

$$W = \sum_{\substack{Todos \\ los\ pares}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_{ij}|} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_{ij}|} \quad i \neq j \tag{21}$$

En la última expresión incluimos el factor ½ para evitar contabilizar dos veces el mismo término al recorrer las sumatorias todos los valores de *i* y *j*.

Por otra parte, habíamos visto que si teníamos N cargas en el espacio

$$V_{sistema}(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j<i} Q_j \frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j^{\,'}\right|} \quad (22)$$

En consecuencia

$$W = \sum_{i<j} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i \quad Q_j}{\left|\vec{r}_{ij}\right|} = \frac{1}{2}\sum_i Q_i V(\vec{r}_i) \quad (23)$$

Es decir, sabiendo "el potencial" que genera la distribución de N-1 cargas restantes sobre cada carga, podemos saber el trabajo total realizado para armar nuestra distribución de N cargas. En esta expresión $V(\vec{r}_i)$ es el potencial que "ve" cada carga Q_i

4.3 *Energía de una distribución continua de cargas en vacío*

Cuando tenemos una distribución continua de cargas las sumas anteriores deben ser reemplazadas por integrales. Así, si consideramos que cada elemento de volumen *dv* tiene una cantidad de carga $dQ=\rho dv$ obtenemos:

$$W = \frac{1}{2}\int_{\substack{Todo \\ el\ espacio}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}_{12}\right|} dv_1 dv_2 \quad (24)$$

donde tenemos ahora dos integrales que recorren toda la distribución de cargas (por eso mantenemos el factor ½ al comienzo).

Si nos concentramos en la integral sobre dv_2 observamos lo siguiente:

$$\int \frac{\rho(2)}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}_{12}\right|} dv_2 = V(1) \quad (25)$$

Observamos que la misma devuelve el potencial generado en la posición 1 por toda la distribución 2, por lo que podemos reducir la expresión (5) a:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(1)V(1)dv_1 \quad (26)$$

El uso del subíndice para indicar la región es entonces innecesario puesto que no quedan variables de la región 2 en la expresión. Entonces reducimos a:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V dv \quad (27)$$

Esta es la relación final que nos permite computar la cantidad de energía almacenada en el sistema. Es decir, vamos incrementando la carga en un δq con lo que el trabajo se incrementará en δq V

Este "trabajo por unidad de carga" cuando pasamos al continuo resulta

$V = \dfrac{dU}{dq}$ de forma tal que $\int dU = \int V\, dq$ (28)

4.4 Un ejemplo para introducir la densidad de energía electrostática

De los muchos ejemplos que podemos dar para aplicar esta expresión tomamos el caso simple de un capacitor de placas paralelas de área A, separación d y conectado a una pila de valor V_p. Si asignamos a la placa negativa el potencial de referencia nulo, entonces la otra se encuentra a un potencial V_p y la cantidad de energía almacenada es:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V dv = \frac{1}{2} V_p \int \rho dv = \frac{1}{2} V_p Q = \frac{1}{2} C V_p^2 \quad (29)$$

donde C es la capacidad.

Introducimos ahora el concepto de densidad de energía u como la cantidad de energía dW almacenada por unidad de volumen dv, es decir:

$$u = \frac{dW}{dv} \qquad (30)$$

En el sistema MKS la densidad de energía se mide en J/m^3.

En nuestro ejemplo esta cantidad es muy fácil de calcular puesto que todas las magnitudes son uniformes así que el cómputo se reduce a dividir la cantidad de energía almacenada por el volumen.

$$u = \frac{W}{v} = \frac{1/2\, Q V_p}{Ad} = \frac{1}{2}\frac{Q}{A}\frac{V_p}{d} = \frac{1}{2}\sigma \frac{V_p}{d} = \frac{1}{2}\left|\vec{D}\right|\left|\vec{E}\right| \qquad (31)$$

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2}\frac{CV^2}{Ad} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon \frac{A}{d}}{A}\frac{V^2}{d} = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{V^2}{d^2} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\left|\vec{D}\right|\left|\vec{E}\right| \quad (32)$$

En esta última expresión recordamos que la razón de la carga Q almacenada en una placa al área A de la misma es la densidad superficial de carga σ y que ésta coincide con el módulo del vector desplazamiento $\vec{D}$. Asimismo recordamos que la razón de la diferencia de potencial entre placas V_p a la distancia d entre las mismas coincide con el módulo del campo eléctrico $\vec{E}$.

Vemos que, al menos en este caso simple, pudimos reducir el cálculo de la densidad de energía almacenada a una expresión simple en los campos $\vec{D}$ y $\vec{E}$.

Por supuesto que nada sabemos de la generalidad de la expresión anterior y debemos hacer una demostración más cuidadosa antes de aplicarla a otros casos, por lo que procederemos con más cuidado.

En el caso del capacitor esférico, el volumen involucrado es el que hay entre los conductores, es decir, $\frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)$ y

$$\Delta U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1R_2}\right) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1R_2} \quad (33)$$

Sin embargo, la densidad de energía no se puede calcular como $\Delta U / \frac{4\pi}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right)$ pues resulta no uniforme. Observemos lo siguiente:

Si consideramos, en cambio, que, como en el caso del capacitor de placas plano-paralelas, la densidad volumétrica de energía potencial es

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{2.(4\pi)^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^4}$$ e integramos en el volumen, tendremos

$$U = \iiint_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}} u\, d\mathcal{V} = \iiint_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}} \frac{Q^2}{2.(4\pi)^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^4}4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\iiint_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}} \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1R_2} \quad (34)$$

que coincide con el calculado a través de la expresión de la capacidad.

4.5 Una aproximación más formal al cómputo de la densidad de energía[2]

Recordemos la forma integral del teorema de Gauss:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q \quad (35)$$

que llevado a su forma diferencial es:

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho \quad (36)$$

Utilizamos esta última forma para computar nuevamente la energía del sistema:

$$W = \frac{1}{2}\int_v \rho V dv = \frac{1}{2}\int_v \left(\nabla \cdot \vec{D}\right) V dv \qquad (37)$$

Una identidad útil del análisis vectorial es la siguiente. Dada una función escalar ϕ y una vectorial $\vec{A}$ podemos escribir (otra vez hay que repasar Análisis II):

$$\nabla\left(\phi\vec{A}\right) = \phi\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A}\nabla\phi \qquad (38)$$

Que aplicadas a nuestro caso resultan en:

$$W = \frac{1}{2}\int_v \nabla\left(V\vec{D}\right) dv - \frac{1}{2}\int_v \vec{D} \cdot \left(\nabla V\right) dv \qquad (39)$$

Por el teorema de la divergencia, la primera integral puede transformarse de una de volumen a una de superficie del producto $V\vec{D}$ sobre la superficie cerrada que rodea a la región. Pero si esta región ha de contener a todos los campos es necesario extenderla hasta el infinito. Dado que V varía como $1/r$ y D lo hace como $1/r^2$ entonces el integrando tiene una dependencia de la forma $1/r^3$. Por otra parte la superficie aumenta como r^2 por lo que la tendencia general del integrando es de la forma $1/r$. Entonces el valor total de primera integral tiende a cero conforme la superficie tiende a infinito.

$$\int_v \nabla\left(V\vec{D}\right) dv = \int_{S_\infty} V\vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad (40)$$

Por lo tanto para el cómputo de la energía sólo es necesaria la segunda integral.

Si recordamos que el campo eléctrico lo podemos computar como menos el gradiente del potencial obtenemos:

$$W = \frac{-1}{2}\int_v \vec{D} \cdot \nabla V dv = \frac{1}{2}\int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv \qquad \rightarrow \qquad u = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} \qquad (41)$$

Esta última relación coincide con la que habíamos obtenido para el capacitor plano pero ahora tiene validez general y no restringida a ese ejemplo en particular.

Al resolver un problema electrostático tenemos fácilmente disponibles los valores de $\vec{D}$ y $\vec{E}$ por lo que computar la densidad de energía no representa mayor problema. Si integramos dicha densidad de energía a todo el volumen donde haya campo no nulos entonces obtendremos la cantidad total de energía que hay almacenada en el sistema.

¿Qué hacemos ahora con la teoría de la sección anterior?

Primero, **NO** pretendemos que recuerden de memoria la demostración. Sólo quisimos mostrar que el concepto de densidad de energía y cómo se calcula tienen validez más allá del caso simple (capacitor plano) con el que fueron introducidas.

Vamos a ver ahora cómo operamos con ellas para encontrar respuestas útiles.

Por supuesto que no tiene sentido volver sobre el capacitor plano puesto que de allí venimos, así que no tiene gracia.

4.6 *Energía necesaria para formar distribuciones de carga en vacío y en medios materiales*

Se puede hacer de dos "maneras": 1) $W = \frac{1}{2}\int V\, dq'$ (42)

2) $W = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\, d\mathcal{V}$ (43)

Es importante enfatizar que la integración debe proceder sobre toda región que tenga campos no nulos y no limitarse a la región donde hay cargas. Sin embargo, en el caso 1) la integración sobre todo el espacio se convierte en la integración sobre los volúmenes donde hay cargas libres, y en 2) sobre los volúmenes donde hay campo. Pero usar una u otra expresión dependerá de los datos que tengamos.

4.6.1 *Distribución esférica de carga de densidad volumétrica uniforme*

La distribución de cargas se puede pensar como muchos elementos de carga *dq* que se trae desde el infinito. Cada uno de ellos adquiere energía potencial al ser colocado en "la esfera", es decir, el trabajo realizado para fabricar la distribución de cargas es igual a la energía potencial electrostática almacenada. Se debe primero llevar el *dq* hasta la esfera y luego distribuirlo uniformemente, o voy manteniendo "quietas" las cargas en una esferita de radio menor que *R* y voy agregando las otras *dq*.

En vacío

Consideraremos, en primer lugar que no hay ningún medio material. Si la esfera tiene radio *R*, sabemos que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \rho \dfrac{R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\breve{e}_r & r > R \\ \rho \dfrac{1}{3\varepsilon_0} r\,\breve{e}_r & r < R \end{cases} \qquad (44)$$

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \rho \dfrac{R^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{1}{r} & r > R \\ \rho \dfrac{R^2}{2\varepsilon_0} - \rho \dfrac{1}{6\varepsilon_0} r^2 & r < R \end{cases} \qquad (45)$$

habiendo **definido** el cero de potencial en el infinito.

1) A través del potencial

$$W_{vacío} = \frac{1}{2} \int_{\substack{todo\ el \\ espacio}} V\, dq' = \frac{1}{2} \int_{esfera} V\, \rho\, 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \int_{esfera} \left(\rho \frac{R^2}{2\varepsilon_0} - \rho \frac{1}{6\varepsilon_0} r^2 \right) \rho\, 4\pi r^2 dr =$$

$$= \rho^2 \frac{2\pi}{6\varepsilon_0} \left(R^5 - \frac{R^5}{5} \right) = \rho^2 \frac{4\pi}{15\varepsilon_0} R^5 = Q^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \frac{3}{5} \qquad (46)$$

2) A partir del campo eléctrico

$$W_{vacío} = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D}\ d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int \left| \vec{E} \right|^2\ d\mathcal{V} =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[\int_R^\infty \left(\rho \frac{R^3}{3\ \varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \right)^2 4\ \pi\ r^2 dr + \int_0^R \left(\rho \frac{1}{3\ \varepsilon_0} r \right)^2 4\ \pi\ r^2 dr \right] = (47)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{4\ \pi\ \rho^2}{9\ \varepsilon_0^2} \left(R^5 + \frac{R^5}{5} \right) = Q^2 \frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_0} \frac{1}{R} \frac{3}{5}$$

Como era de esperar, se obtiene el mismo resultado

En un medio material

Si en la zona donde ubicaremos las cargas hay un medio material con permitividad dieléctrica ε y en el resto del espacio hay vacío, se tiene que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \rho \dfrac{R^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} \breve{e}_r & r > R \\ \rho \dfrac{1}{3\varepsilon} r\, \breve{e}_r & r < R \end{cases} \qquad (48)$$

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \rho \dfrac{R^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{1}{r} & r > R \\ \rho \dfrac{R^2}{3\varepsilon_0} + \rho \dfrac{1}{6\varepsilon} \left(R^2 - r^2 \right) & r < R \end{cases} \qquad (49)$$

habiendo también **definido** el cero de potencial en el infinito.

En este caso, elegimos para el cálculo la forma 1) (ec.(42))

$$W_{dieléctrico} = \frac{1}{2}\int_{\substack{todo\ el\\ espacio}} V\ dq' = \frac{1}{2}\int_{esfera} V\ \rho\ 4\pi\ r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{esfera}\left(\rho\frac{R^2}{3\ \varepsilon_0} + \rho\frac{1}{6\ \varepsilon}\left(R^2 - r^2\right)\right)\rho\ 4\pi\ r^2 dr = \qquad (50)$$

$$= \rho^2\frac{4\ \pi\ R^5}{6}\left(\frac{1}{15\ \varepsilon} + \frac{1}{3\ \varepsilon_0}\right) = Q^2\frac{1}{8\ \pi\ \varepsilon_0}\frac{1}{R}\left(1 + \frac{1}{5\ \varepsilon_{rel}}\right)$$

Así

$$\frac{W_{vacío}}{W_{dieléctrico}} = \frac{Q^2\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R}\dfrac{3}{5}}{Q^2\dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R}\left(1+\dfrac{1}{5\varepsilon_{rel}}\right)} = \frac{\dfrac{6}{5}}{\left(1+\dfrac{1}{5\varepsilon_{rel}}\right)} > 1 \, (51)$$

Es decir, la energía necesaria para "armar" una distribución esférica cargada uniformemente en volumen es menor si la carga se la distribuye en un dieléctrico que si se lo quiere hacer en vacío. ¿Se puede tratar de explicar este comportamiento a través de nuestro modelo de materiales dieléctricos?

4.6.2 Distribución cilíndrica de carga de densidad superficial uniforme

Vamos a tratar un caso ligeramente diferente, el de un **cable coaxial** (capacitor cilíndrico) de radio interior *a*, exterior *b*, largo *L* y cuyo espacio entre placas está relleno por un dieléctrico de permitividad relativa ε_r.

Este caso ya lo hemos resuelto y es particularmente simple si nuevamente despreciamos los efectos de borde. En tal caso las líneas de campo son simplemente radiales; nacen en el conductor central (supuesto positivo) y mueren en el conductor externo (supuesto negativo).

Aunque ya hemos desarrollado en las clases el cómputo de la capacidad vamos a repetirlo para ver cómo lo conectamos con lo que hemos aprendido.

Primero asumimos que el sistema fue cargado con una pila de valor V_p aplicada entre el conductor central y el exterior. Las cargas almacenadas en cada uno de ellos tienen módulo *Q*. Dados que hemos sido eficientes y pudimos "adivinar" la dirección de las líneas de campo entonces podemos emplear con provecho el teorema de Gauss para calcular la intensidad de los campos.

La superficie gaussiana más práctica es un cilindro coaxial con el conductor central y cuyo radio *r* se encuentra comprendido entre *a* y *b*.

En estas condiciones computamos el flujo del vector desplazamiento a través de dicha superficie. Utilizamos dicho vector porque igualaremos el flujo a la cantidad de carga libre ubicada dentro de la superficie que es precisamente la carga *Q* perteneciente al conductor central.

Como ya procedimos otras veces reconocemos que el flujo por las tapas del cilindro es nulo dado que las líneas de campo son perpendiculares al vector que representa al elemento de superficie.

En la cara lateral del cilindro las líneas de campo son paralelas al elemento de superficie, por lo que el producto escalar que determina el elemento de flujo es simplemente el producto de los módulos de los vectores.

Por último, al ver que el problema carece de detalle angular, concluimos que a cada radio la intensidad de los campos es única, por lo que dicha intensidad puede ser extraída fuera de la integral para obtener:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{Sup\,lat} \left|\vec{D}\right|\left|d\vec{S}\right| = \left|\vec{D}\right| \int_{Sup\,lat} \left|d\vec{S}\right| = \left|\vec{D}\right| 2\pi r L = Q$$
$$\left|\vec{D}\right| = \frac{Q}{2\pi r L} \qquad \left|\vec{E}\right| = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r L} \tag{52}$$

Vemos (como ya sabíamos) que los campos varían en forma inversamente proporcional a la distancia al centro.

Para conectar la cantidad de carga almacenada con el valor de la pila computamos la circulación del campo eléctrico desde el conductor central hasta el exterior.

$$V(b) - V(a) = -V_p = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$C = \frac{Q}{V_p} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{53}$$

Resultados estos que ya conocíamos (ya los debíamos conocer????)

La cantidad de energía acumulada es entonces

$$W = \frac{1}{2}CV_p^2 = \frac{1}{2}\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}V_p^2$$

Vamos a ver cómo podemos llegar al mismo resultado operando con nuestra recién definida densidad de energía. Primero vamos a computarla:

$$u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\frac{Q}{2\pi rL}\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r rL} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{(2\pi rL)^2\varepsilon_0\varepsilon_r} \tag{55}$$

Esta relación nos dice que hay más densidad de energía en las regiones próximas al conductor central puesto que el campo es más intenso allí.

Ahora, a diferencia del capacitor plano, no podemos computar la energía total simplemente multiplicando la densidad de energía por el volumen puesto que no hay uniformidad de los campos. Lo que hacemos es integrar sobre el volumen.

$$W = \int_v u dv = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^L u\, dz\, rd\varphi\, dr = 2\pi L \frac{Q^2}{(2\pi L)^2\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_a^b \frac{1}{2}\frac{rdr}{r^2} = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{56}$$

Que coincide con la (19) si nos ayudamos con la (18) (hagan el reemplazo).

Hasta aquí puede parecer que nos hemos complicado mucho para recuperar un resultado que podíamos computar fácilmente con la capacidad.

Este último ejemplo con seguridad parecerá muy difícil de seguir y hasta es probable que alguien considere que le resultará imposible repetirlo sin copiarlo y menos aún acometer otro ejemplo.Sin embargo es una sensación errónea. Es posible repetir este ejemplo y aún desarrollar otros, sólo hace falta entrenamiento y práctica.

Ahora es el turno de ustedes...